Teorema del indice para variedades contacto

Yesid Fernando Patiño Naranjo
Universidad Nacional de Colombia
Bogotá, Colombia

CIMPA School Medellín
Posters Session
Medellín, Colombia, June 18-27, 2018

Abstract

La característica de Euler y la signatura, dos importantes invariantes homotópicos de una variedad diferencial cerrada, son índices de operadores diferenciales elípticos. Este no es un hecho casual, de hecho el índice de cualquier operador pseudodiferencial elíptico entre dos haces vectoriales sobre una variedad cerrada también es un invariante homotópico que, como la signatura y la característica de Euler, puede calcularse como el emparejamiento de clases apropiadas de homología y cohomología. Este resultado se debe primordialmente a Michael Atiyah e Isadore Singer quienes lo publicaron en 1968. De hecho Atiyah y Singer respondieron la pregunta de cómo expresar el índice de Fredholm de manera geométrica que fue propuesta por I. M. Gelfand cerca de 1960. Gelfand propuso que el índice de un operador diferencial elíptico podría ser expresado en términos de los coeficientes de orden más alto del operador (esto hace referencia al símbolo principal), ya que las partes de orden más bajo, sólo proporcionan perturbaciones compactas que no cambian el índice. Atiyah y Singer tuvieron la idea de usar K-teoría (un invariante topológico) para formular y resolver el problema de Gelfand y lograron encontrar la fórmula para el cálculo del índice de un operador pseudodiferencial elíptico sobre una variedad diferencial que se publicaría en 1968. En la serie de artículos publicados por Atiyah y Singer alrededor de la teoría del índice, el cuarto de estos, publicado en 1971, versa sobre el teorema del índice para una familia de operadores elípticos definida usando haces fibrados. En 1984 Connes y Skandalis desarrollan la teoría del índice para foliaciones (es decir distribuciones involutivas) que generaliza el teorema de Atiyah-Singer para familias de operadores elípticos sobre haces fibrados. Recordemos que el teorema de Frobenius nos garantiza que toda distribución involutiva (foliación) define también una familia de variedades diferenciales (las subvariedades integrales maximales), el espacio que subindiza dicha familia no tiene en general una buena geometría por lo que para su estudio es natural pensar en usar geometría no conmutativa. Así que en la teoría del índice de Connes y Skandalis aparece naturalmente como herramienta la geometría no conmutativa. En 2005 Van-Erp en su tesis de doctorado ofrece un método para tratar con distribuciones no involutivas que estamos estudiando.